# Algebra Lineare e Geometria

# Esercizi su applicazioni lineari

## 1. Applicazioni lineari

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y + z).$$

- Verifica che $f$ è lineare.
- Scrivi la matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.
- Trova una base di $\ker f$ e determina se $f$ è iniettiva.
- Calcola $w = f(2, 1, 3)$.
- Calcola $f^{-1}(w)$, la preimmagine di $w$ via $f$.

**Esercizio 2.** Verifica se le seguenti applicazioni sono lineari.

(1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x, y) = (x + y, 2x - 3y, y)$
(2) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x, y) = (x + y + 1, 2x - 3y, y^2)$
(3) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$
(4) $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{R}$ con $L(p(t)) = 2p(1) + 3p(0)$
(5) $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ con $L(p(t)) = (p(1) - p(0), p(1) - 1)$
(6) $L : \mathrm{Mat}(2, 2) \to \mathbb{R}^2$ con $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$
(7) $L : \mathrm{Mat}(2, 2) \to \mathbb{R}$ con $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

**Esercizio 3.** Sia $\{e_1, e_2\}$ la base standard di $\mathbb{R}^2$ e sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L(e_1) = (1, 2, 1) \qquad\qquad L(e_2) = (4, 0, 1).$$

- Calcola l'immagine di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Verifica se $v_1 = (0, 0, 0), v_2 = (3, 4, 1), v_3 = (3, -2, 0)$ sono in $\mathrm{Im}(L)$.

**Esercizio 4.** Sia $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determina se $L_A$ è iniettiva e/o suriettiva. $L_A$ è un isomorfismo?
- Trova una base e determina la dimensione di $\ker L_A$ and $\operatorname{Im} L_A$.

**Esercizio 5.** Per ognuna delle seguenti matrici determina per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare associata alla matrice è insiettiva, suriettiva, o biettiva. Nei caso in cui è biettiva, calcolane l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2+t & 1+t \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.** Per $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita mandando, per $i = 1, 2, 3$, il vettore $e_i$ della base standard di $\mathbb{R}^3$ al vettore $v_i$ definito sotto.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h+1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2h \\ 2 \\ h-2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$, determina la dimensione $\ker T_h$ e di $\operatorname{Im} T_h$, e deduci se $T_h$ è iniettiva e/o suriettiva e quindi se è un'isomorfismo.

**Esercizio 7.** Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$U : \begin{cases} 2x + 3y + z + w = 0 \\ y - x + z = 0 \end{cases}.$$

- Trova una base e la dimensione di $U$.

- Considera la seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Sia $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata a $A$. Trova una base e la dimensione di $L_A(U)$.
- Considera la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Sia $L_B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata a$B$. Trova una base e la dimensione di $L_B(U)$.

## 2. Cambio di base

**Esercizio 8.** Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

- Scrivi la matrice associata a $T$ rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^4$ and $\mathbb{R}^3$.
- Scrivi la matrice $M(T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ associata a $T$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$$
$$\mathcal{C} = \{(-1,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

- Calcola immagine e kernel di $T$ e deduci se $T$ è iniettiva o suriettiva.
- Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, calcola $T^{-1}(3,3,k)$, la preimagine di $(3,3,k)$ via $T$.

**Esercizio 9.** Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (2,0,0)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T(v_1) = (3,1,2),\ T(v_2) = (0,1,1),\ T(v_3) = (6,4,6).$$

Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$.

- Scrivi $M(T)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.
- Scrivi $M(T)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$.
- Scrivi $M(T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$.
- Scrivi $M(T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.
- Determina la dimensione e trova una base di $\ker T$ and $\mathrm{Im}T$.
- Determina se $T$ è iniettiva e/o suriettiva.
- Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v_k = (k+1, 0, k)$ è in $\mathrm{Im}T$.

**Esercizio 10.** Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+3z \\ x+3y+6z \end{pmatrix}.$$

Verifica che $L$ è invertibile e determina l'inversa $L^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

**Esercizio 11.** Sia $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ la mappa definita da

$$L\big(p(t)\big) = tp''(t) - p'(t).$$

- Verifica che $L$ è lineare.
- Scegli due basi non-standard $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e $\mathcal{C}$ of $\mathbb{R}_{\leq 1}$ e scrivi la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ associata a $L$ rispetto le basi $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$.
- Calcola il rango di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.
- Usa il teorem del rango per dedurre se $L$ è iniettiva e/o suriettiva.

**Esercizio 12.** Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x^2+1) = (1,0,k,1), \quad T(x^3) = (k,0,0,1),$$

$$T(x^3+x+1) = (0,0,1,0), \quad T(x-1) = (1,1,0,0).$$

- Scrivi la matrice $A$ associata a $T$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e la base standard di $\mathbb{R}^4$.
- Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $T$ è invertibile?

**Esercizio 13.** Considera le seguenti basi di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$.

$$\mathcal{B} = \{2t+1, t-1\} \qquad \mathcal{C} = \{-t-1, t\}$$

- Scrivi la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
- Scrivi la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di cambio di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
- Verifica che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.

**Esercizio 14.** Considera le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,3,6)\} \qquad \mathcal{C} = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$$

- Scrivi la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
- Scrivi la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ di cambio di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
- Verifica che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}$.

## 3. Autovalori e autovettori

**Esercizio 15.** Per ognuna delle seguenti matrici determina il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 16.** Per ognuna delle seguenti coppie di matrici $A$ e vettori $v$, determina per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $v$ è un autovettore di $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t+2 & -2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} t & t+1 & 3 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 17.** Per ognuna delle seguenti matrici determina il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi. Determina la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore. Deterina se la matrice è diagonalizzabile. Se lo è, trova una base di autovettori, la forma diagonale, e la matrice di cambio di base.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 33 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 18.** Considera il seguento polinomio:

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 1) - (1 + x)^2 - 2(x + 3) + 4 + 2x(x + 3).$$

Trova una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ con polinomio caratteristico uguale a $p(x)$.

**Esercizio 19.** Per ognuna delle seguente matrici, determina i valori di $t$ per cui la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Per ognuno di questi valori trova la forma diagonale della matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 20.** Sia $A$ la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Senza calcolare il polinomio caratteristico, mostra che $\lambda = 1$ è un autovalore di $A$ con molteplicità geometrica $g(1) = 3$.
- Qual è la somma delle colonne di $A$? Usa questa informazione per trovare un altro autovalore di $A$. What is the sum of the columns of $A$? Use this information to find another eigenvalue.
- Deduci il polinomio caratteristico di $A$.
- $A$ è diagonalizzabile?

**Esercizio 21.** Considera la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2, 2)$.

- Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?
- Determina gli autovalori di $A^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.